Københavns Universitet. Økonomisk Institut

2. årsprøve 2015 V-2DM rx ret

Skriftlig eksamen i Dynamiske Modeller

Torsdag den 19. februar 2015

Rettevejledning

Opgave 1. For ethvert $a \in \mathbf{R}$ betragter vi tredjegradspolynomiet $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = z^3 + (2+a)z^2 + (2+2a)z + 2a.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + (2+a)\frac{d^2x}{dt^2} + (2+2a)\frac{dx}{dt} + 2ax = 0$$

og

$$(**) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 2x = 14e^{-t}.$$

(1) Vis, at $z = -a$ er en rod i polynomiet P, og bestem dernæst de øvrige rødder i P.

Løsning. Ved indsættelse af tallet $z = -a$ i polynomiet P, ser vi, at $z = -a$ er en rod i P, og ved efterfølgende polynomiumsdivision får vi, at

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = (z+a)(z^2 + 2z + 2).$$

Vi ser nu, at

$$z^2 + 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow z = -1 \pm i,$$

og hermed har vi godtgjort, at P har de tre rødder: $-a$, $-1+i$ og $-1-i$.

(2) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Vi finder, at

$$x = c_1 e^{-at} + c_2 e^{-t} \cos t + c_3 e^{-t} \sin t,$$

hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$.

(3) For hvilke $a \in \mathbf{R}$ er differentialligningen $(*)$ globalt asymptotisk stabil.

Løsning. For ethvert $a > 0$ er differentialligningen $(*)$ globalt asymptotisk stabil.

(4) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

Den tilsvarende homogene differentialligning er differentialligningen $(*)$ for $a = 1$. Vi gætter på en speciel løsning af formen $\hat{x} = Ate^{-t}$, og vi får så, at

$$\hat{x}' = Ae^{-t} - Ate^{-t},\ \hat{x}'' - 2Ae^{-t} + Ate^{-t},\ \hat{x}''' = 3Ae^{-t} - Ate^{-t},$$

hvoraf vi finder, at $A = 2$. Den fuldstændige løsning til $(**)$ er derfor

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} \cos t + c_3 e^{-t} \sin t + 2te^{-t},$$

hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$.

(5) Bestem den løsning $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ til differentialligningen $(**)$, så betingelserne $\tilde{x}(0) = 0, \tilde{x}'(0) = 0$ og $\tilde{x}''(0) = 0$ er opfyldt.

Løsning. Vi ser, at

$$x' = (2 - c_1)e^{-t} + (c_3 - c_2)e^{-t} \cos t - (c_2 + c_3)e^{-t} \sin t - 2te^{-t},$$

og at

$$x'' = (c_1 - 2)e^{-t} - 2c_3 e^{-t} \cos t + 2c_2 e^{-t} \sin t + 2te^{-t},$$

og ved at benytte dette i de krævede betingelser får vi, at

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ (2 - c_1) - c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 - 2 - 2c_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 - c_2 + c_3 = -2 \\ c_1 - 2c_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 2 \\ c_3 = -2 \end{cases}.$$

Heraf får vi nu, at

$$\tilde{x} = -2e^{-t} + 2e^{-t} \cos t - 2e^{-t} \sin t + 2te^{-t}.$$

Opgave 2. Vi betragter 3×3 matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og vektordifferentialligningerne

$$(\S) \qquad \frac{d\mathbf{z}}{dt} = A\mathbf{z}$$

og

$$(\S\S) \qquad \frac{d\mathbf{z}}{dt} = B(v)\mathbf{z},$$

hvor

$$B(v) = \begin{pmatrix} v & 1 & 1 \\ 1 & v & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

for $v \in \mathbf{R}$.

(1) Bestem egenværdierne og egenrummene for matricen A.

Løsning. Matricen A har det karakteristiske polynomium

$$P(t) = \det(A - tE) = (1-t)^3 - (1-t) = (1-t)\big((1-t)^2 - 1\big),$$

og heraf får vi, at de karakteristiske rødder (og dermed egenværdierne for A) er $t = 0, t = 1$ og $t = 2$.

De tilhørende egenrum er

$$V(0) = N(A) = \text{span}\{(1,0,1)\},\ V(1) = N(A-E) = \text{span}\{(0,1,0))\}$$

og

$$V(2) = N(A-2E) = \text{span}\{(-1,0,1)\}.$$

(2) Bestem den fuldstændige løsning for vektordifferentialligningen (§).

Løsning. Den fuldstændige løsning til vektordifferentialligningen (§) er

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$.

(3) Bestem resolventen $P(0,t)$ for differentialligningen (§).

Løsning. Vi ser, at

$$\mathbf{z}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

og hvis vi inverterer matricen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

får vi

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Vi ser nu, at resolventen $P(0,t)$ er den 3×3 matrix, der har søjlerne $\mathbf{p}_1(t), \mathbf{p}_2(t)$ og $\mathbf{p}_3(t)$, hvor

$$\mathbf{p}_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t} \\ 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2t} \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix} \ \text{og} \ \mathbf{p}_3(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2t} \\ 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t} \end{pmatrix}.$$

(4) Er vektordifferentialligningen (§§) globalt asymptotisk stabil for visse værdier af parameteren $v \in \mathbf{R}$?

Løsning. Da 3×3 matricen $B(v)$ er symmetrisk, er vektordifferentialligningen (§§) globalt asymptotisk stabil, hvis og kun hvis $B(v)$ er negativ definit. De ledende hovedunderdeterminanter D_1, D_2 og D_3 af første, anden og tredje orden skal derfor have alternerende fortegn, så $D_1 = v < 0, D_2 = v^2 - 1 > 0$ og $D_3 = 6 - 10v < 0$. Dette medfører, at

$$v < 0 \wedge v^2 - 1 > 0 \wedge v > \frac{2}{5} \Leftrightarrow v < -1 \wedge v > \frac{3}{5}.$$

Dette viser, at vektordifferentialligningen (§§) ikke er globalt asymptotisk stabil for nogen værdi af $v \in \mathbf{R}$.

Opgave 3. Lad mængden K_1 være en kompakt delmængde af $\mathbf{R}^n$, mængden K_2 en kompakt delmængde af $\mathbf{R}^m$ og mængden K_3 en kompakt delmængde af $\mathbf{R}^l$.

(1) Vis, at mængden

$$K = K_1 \times K_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \mid x \in K_1 \wedge y \in K_2\}$$

er en kompakt delmængde af $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$.

Løsning. Vi vælger en vilkårlig følge $(v_k) = \big((x_k, y_k)\big)$ af punkter fra mængden $K_1 \times K_2$. Følgen (x_k) er en følge på den kompakte mængde K_1, og denne følge har derfor en konvergent delfølge (x_{k_p}), der har grænsepunkt $x \in K_1$. Delfølgen (y_{k_p}) er en følge af punkter på den kompakte mængde K_2, og den har derfor en konvergent delfølge $(y_{k_{p_q}})$ med grænsepunkt $y \in K_2$.

Vi ser nu. at den oprindelige følge $(v_k) = \big((x_k, y_k)\big)$ har den konvergente delfølge $(v_{k_{p_q}}) = \big((x_{k_{p_q}}, y_{k_{p_q}})\big)$, som har grænsepunktet $v = (x, y) \in K_1 \times K_2$. Heraf fremgår det, at $K_1 \times K_2$ er en kompakt delmængde af $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$.

(2) Vis, at mængden

$$C = K_1 \times K_2 \times K_3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^l \mid x \in K_1 \wedge y \in K_2 \wedge z \in K_3\}$$

er en kompakt delmængde af $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^l$.

Løsning. Dette følger umiddelbart af ovenstående resultat.

Opgave 4. Vi betragter integralet

$$I(x) = \int_0^{\pi} \Big((e^t + \sin t)x + 2\dot{x}^2\Big)\, dt = \int_0^{\pi} \left((e^t + \sin t)x + 2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) dt$$

og den funktion $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : F(x, y) = (e^t + \sin t)x + 2y^2.$$

(1) Vis, at funktionen F er konveks overalt på definitionsmængden $\mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^t + \sin t \text{ og } \frac{\partial F}{\partial y} = 4y.$$

Da har funktionen $F = F(x, y)$ Hessematricen

$$F'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Denne matrix er positiv semidefinit, så funktionen F er konveks overalt på $\mathbf{R}^2$.

(2) Bestem den funktion $x^* = x^*(t)$, der minimerer integralet $I(x)$, idet betingelserne $x^*(0) = \frac{1}{4}$ og $x^*(\pi) = \frac{1}{2}e^{\pi}$ er opfyldt.

Løsning. Ovenstående resultat viser, at det givne variationsproblem er et minimumsproblem.

Eulers differentialligning for dette problem er

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \Leftrightarrow e^t + \sin t - 4\ddot{x} = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} = \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}\sin t.$$

Heraf får vi så, at den fuldstændige løsning til Eulers differentialligning er

$$\dot{x} = \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}\cos t + c_1 \text{ og } x = \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}\sin t + c_1 t + c_2,$$

hvor $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

Idet betingelserne $x^*(0) = \frac{1}{4}$ og $x^*(\pi) = \frac{1}{2}e^{\pi}$ skal være opfyldt, får vi, at $c_1 = \frac{1}{4\pi}e^{\pi}$ og $c_2 = 0$. den søgte løsning er derfor

$$x^*(t) = \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{4\pi}e^{\pi}t.$$